Enregistrament i reconstrucció de fronts d'ona fent servir mètodes d'holografia digital*

I. S. Artozqui,† O. Fonts, M. A. Juli, I. Lapuente, J. Llobet, E. Pleguezuelos, A. Quintillà‡ i A. Carnicer§

Introducció

L'origen de l'holografia és degut a Denis Gabor (Premi Nobel l'any 1971), que l'any 1948 va proposar el que ell va anomenar *un mètode d'enregistrament i reconstrucció de fronts d'ona.* La idea consisteix a enregistrar informació complexa (amplitud i fase de l'ona) sobre un suport físic que només admet magnituds reals i positives (en realitat, valors proporcionals a l'energia). Les necessitats de coherència van fer que no es realitzés el primer holograma, fins que no es van fabricar els primers làsers, l'any 1961.

Encara que l'holografia és una tecnologia amb múltiples aplicacions, la més popular és la d'enregistrar i reconstruir imatges d'objectes tridimensionals. Com que l'ona emergent d'un objecte que s'il·lumina amb un focus de llum és complexa (té mòdul i fase), i els sistemes de registre, generalment fotogràfics, només emmagatzemen valors reals i positius, es perd la informació de la fase que és la que aporta la informació tridimensional i dels detalls de l'objecte. Hem de tenir present que la fotografia només és una imatge plana de l'objecte en una determinada direcció, obtinguda com a projecció geomètrica a través d'un sistema de lents.

L'holograma es fa interferint l'ona difractada per l'objecte tridimensional, quan és il·luminat amb una ona monocromàtica i coherent, amb una altra ona de referència provinent de la mateixa font. Aquestes interferències, que conserven informació de l'amplitud i de la fase, són reals i positives i es poden enregistrar en una placa fotogràfica. Si s'il·lumina aquesta placa de manera adient (amb una ona igual a la de referència utilitzada en el procés de registre) es reconstrueix un front d'ona (amb amplitud i fase) equivalent al que provindria de l'objecte tridimensional original. Es tracta, de fet, d'una memòria per a fronts d'ona.

A principi dels anys setanta, diversos autors van introduir una nova idea, l'holografia digital. Consisteix a codificar, mitjançant algorismes de càlcul per ordinador, la informació complexa del front d'ona sobre un suport que només admet valors reals i positius. Es tracta de generar una màscara de tal manera que, en difractar-s'hi la llum a través, es generi el front d'ona desitjat. Inicialment, l'holograma un cop calculat s'imprimia en paper i es fotografiava. Un dels avantatges de l'holografia digital en relació amb l'holografia òptica és la possibilitat de generar fronts d'ona qualssevol sense referent físic. Això vol dir que podem dissenyar fronts d'ona amb la informació que ens interessi, amb independència que el front d'ona s'hagi generat a partir d'un objecte tridimensional, d'una imatge plana o d'una distribució d'informació sintetitzada amb una determinada finalitat.

Posteriorment, l'aparició de les pantalles de cristall líquid (*liquid crystal displays*, LCD) ha obert, des de mitjan anys vuitanta, la possibilitat d'automatitzar el procés de l'holografia digital. Aquests dispositius optoelectrònics presenten molts avantatges. D'una banda, presenten transmitància complexa, encara que només poden modular certs valors del pla complex; d'això, en parlarem més endavant. En segon lloc, les LCD són comandades per ordinador i, per tant, no existeix un pas fotogràfic intermedi. No obstant això, actualment les pantalles LCD presenten un nombre baix de píxels: les millors pantalles poden mostrar 1.024×1.024 píxels. Comparem aquesta dada amb la resolució fotogràfica de fins a milers de punts per mil·límetre. Això és un inconvenient important, ja que no és possible representar amb gaire precisió objectes d'una estructura molt rica.

Els mètodes d'holografia digital s'han utilitzat habitualment en diverses aplicacions basades en sistemes de processament òptic d'informació: sistemes de comparació, classificació, detecció i seguiment d'objectes per correlació òptica, processament de dades de radar, reconstrucció d'imatges degradades (desenfocades), encriptació òptica, etc. (Vanderlugt, 1992). Darrerament, la utilització dels dispositius de cristall líquid, juntament

*El present treball s'ha portat a terme en el marc de l'assignatura optativa Laboratori Avançat de Física de darrer curs de l'ensenyament de Física.

† **I. S. Artozqui** és estudiant ERASMUS provinent de la Université des Sciences et Technologies de Lille (Lille I).

‡ **O. Fonts, M. A. Juli, I. Lapuente, J. Llobet, E. Pleguezuelos i A. Quintillà** són alumnes de darrer curs de l'ensenyament de Física a la UB.

§ **A. Carnicer** és professor d'Òptica al Departament de Física Aplicada i Òptica de la UB.

amb materials fotorefractius (com ara el niobat de liti, $LiNbO_3$), com a sistemes d'emmagatzemament massiu, permet pensar en futurs desenvolupaments en el camp de les memòries òptiques. Fent servir hologrames de Fourier s'estan aconseguint densitats d'informació que arriben als 400 bits/μ m^2 (IBM, 2000).[1]

L'objectiu d'aquest treball és donar una visió de conjunt sobre el problema general de l'enregistrament i reconstrucció de fronts d'ona. El treball focalitza la seva atenció en el mètode de generació dels hologrames i no en les seves aplicacions. En la propera secció, s'introdueixen els resultats bàsics de la teoria escalar de la difracció i es relacionen amb el mètode d'obtenció d'hologrames de Fourier, mentre que en l'apartat "Procediment" es discuteixen els mètodes de codificació utilitzats en aquest treball: el mètode de Lee (Lee, 1970), en la simplificació feta per Burckhardt (Burckhardt, 1970) per generar hologrames per computador i l'ajust per mínima distància euclidiana quan es fa servir un dispositiu de cristall líquid.

En les dues darreres seccions sintetitzarem diferents hologrames i avaluarem la seva qualitat amb la reconstrucció del camp original fent servir un muntatge de difractòmetre convergent. La qualitat de la informació reconstruïda amb aquests mètodes s'avalua a partir del càlcul del coeficient de correlació entre la imatge original i la captada experimentalment. D'aquesta manera és possible avaluar tot el procés de registre i reconstrucció del front d'ona.

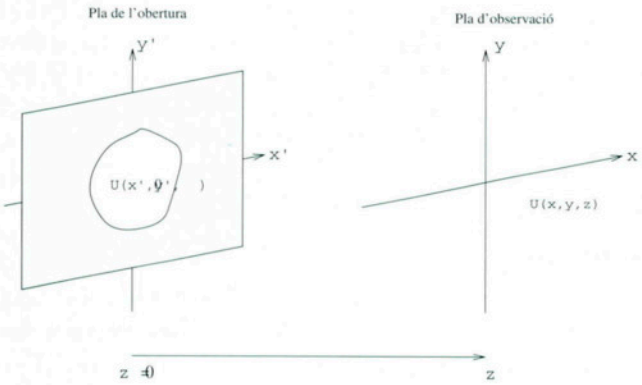

Figura 1: *Geometria de la propagació*

Propagació escalar i holografia de Fourier

Les teories escalars de la llum s'apliquen quan la direcció de polarització del camp elèctric no es modifica en el procés que s'estudia, i, per tant, es pot prescindir d'aquesta informació (Born i Wolf, 1999). La teoria escalar de la difracció permet determinar l'expressió del camp elèctric propagat una distància z, $U(x, y, z)$ a partir del coneixement del camp elèctric en un cert pla de referència $U(x', y', 0)$ (vegeu la figura 1). Si la distància z és molt gran en comparació amb les diferències $x' - x$ i $y' - y$, l'equació que lliga ambdós camps pot ser escrita com

$$U(x,y,z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\exp(\frac{ik}{\lambda z}(x^2+y^2))\int_\Sigma U(x',y',0)$$

$$\exp(\frac{ik}{\lambda z}(x'^2+y'^2))\exp(\frac{2\pi i}{\lambda z}(xx'+yy'))\,dx'dy'. \quad (1)$$

Quan l'equació anterior pot ser utilitzada per calcular el camp propagat, es treballa en condicions de difracció de Fresnel. Noteu que, amb aquest formalisme, els conceptes de difracció i propagació es confonen. El recinte d'integració Σ fa referència a l'obertura que impedeix la propagació lliure del feix. Ara bé, si aquesta obertura no existeix i, per tant, els límits d'integració són infinits, l'equació segueix sent vàlida i pot ser aplicada per determinar l'expressió del camp propagat, a partir del coneixement del camp en un un pla de referència. Per ampliar aquest informació, podeu consultar la referència (Goodman, 1996).

Considerem un objecte, la transmitància del qual és $f(x, y)$, que es troba situat al pla focal objecte d'una lent convergent de distància focal f'. Aquest obejcte és il·luminat per una ona plana monocromàtica d'amplitud A, que viatja en la direcció normal al pla que conté l'objecte. Fixem el pla $z = 0$ en l'objecte. El camp elèctric a $z = 0$ és $U(x, y, 0) = Af(x, y)$. En aquestes condicions, es pot demostrar que el camp elèctric propagat (difractat) en el pla focal imatge de la lent és (Goodman, 1996)

$$U(x,y,2f') \propto \int_\Sigma f(x',y')\exp(\frac{2\pi i}{\lambda f'}(xx'+yy'))dxdy =$$

$$F(\frac{x}{\lambda f'},\frac{y}{\lambda f'}), \quad (2)$$

on $F(u, v)$ és la transformada de Fourier de $f(x, y)$, és a dir, $F(u, v) = \mathcal{FT}[f(x, y)]$. Per tant, en aquestes condicions, el camp propagat es pot calcular a partir de l'obtenció de la transformada de Fourier bidimensional de l'objecte $f(x, y)$. Si l'objecte $f(x, y)$ defineix una imatge, aleshores la transmitància és real. Una imatge en tons de gris es pot modelitzar com una funció bidimensional de transmitància, de manera que aquesta és proporcional al nivell de gris. Per exemple, en una imatge de 256 nivells de gris (8 bits), assignarem transmitància 1 als punts amb nivell de gris 255 (blanc) i transmitància 0 als punts amb nivell de gris 0 (negre).

Quan un front d'ona es capta mitjançant algun sistema de registre, per exemple una pel·lícula fotogràfica, s'enregistra la intensitat del camp, és a dir,

$$I(x,y,2f') \propto U(x,y,2f')U^*(x,y,2f') = |U(x,y,2f')|^2. \quad (3)$$

[1] Vegeu també http://www.research.ibm.com/journal/rd/443/ashley.html

En capturar la intensitat, es perd la fase del camp, que conté informació bàsica per poder-lo reconstruir. Tingueu en compte que un objecte es pot reconstruir, amb una certa pèrdua de qualitat, a partir de la informació de la fase de la seva transformada de Fourier, però, en general, no es pot reconstruir un objecte a partir de la seva amplitud (Juvells *et al.*, 1991).

Mitjançant les tècniques hologràfiques podem enregistrar la fase del front d'ona, i després reconstruir-lo correctament. L'holografia de Fourier consisteix a capturar el front d'ona amb informació de la transformada de Fourier d'un objecte respectar-ne tota la informació. Per fer això col·locarem l'objecte en el pla focal objecte d'una lent convergent. Aquest objecte s'il·lumina amb una ona monocromàtica d'amplitud A que viatja en la direcció de l'eix z. En el pla focal imatge de la lent capturem la interferència entre el camp provinent de l'objecte i una ona plana (ona de referència) d'amplitud A, que viatja en una direcció que forma un angle θ amb l'eix z (figura 2). Es pot demostrar que la distribució d'intensitat captada incorpora informació completa de

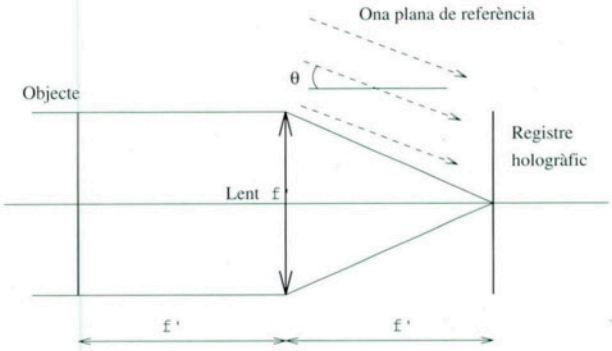

Figura 2: *Enregistrament d'un holograma de Fourier*

la transformada de Fourier de l'objecte.

Aquest tipus d'hologrames permet enregistrar la informació complexa de la transformada de Fourier d'una imatge, encara que la distribució que s'enregistra és real i positiva. Els hologrames de Fourier sintetitzats per ordinador persegueixen una cosa semblant. Es tracta d'enregistrar els valors de la transformada de Fourier d'una distribució d'informació (real o complexa) sobre un sistema de registre que només pot treballar amb valors reals i positius.

Una manera de reconstruir l'holograma, quan l'objecte enregistrat és una imatge, consisteix a il·luminar-lo mitjançant una ona esfèrica que convergeix en un punt situat a una distància d d'on es troba situat l'objecte amb informació de $F(\frac{x}{\lambda f'}, \frac{y}{\lambda f'})$. Normalment, el feix convergent s'aconsegueix fent passar el làser per un expansor i formant-ne la imatge amb l'ajut d'una lent convergent. Allà on es formi la imatge geomètrica de la font de llum, fixarem el pla d'observació. La figura 3 mostra un emissor puntual a una distància s d'una lent convergent de distància focal f'. La imatge de la font es forma

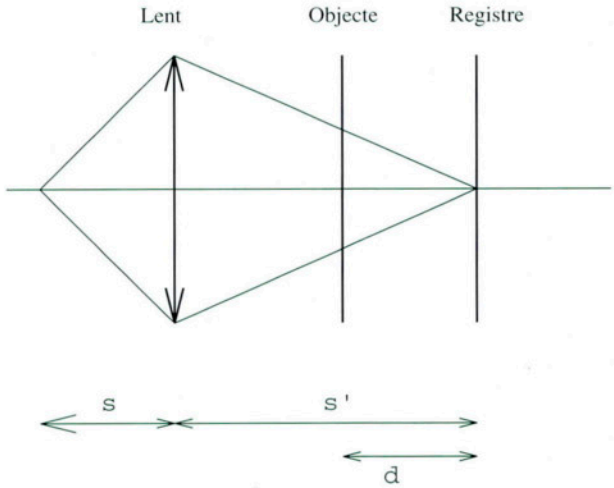

Figura 3: *Difractòmetre convergent*

a una distància s' de la lent (això vol dir que s, s' i f' verifiquen la relació de formació d'imatge $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$).

Podem demostrar que en aquest pla la intensitat del camp reconstruït és proporcional al mòdul al quadrat de la transformada de Fourier de l'objecte, però amb un factor d'escala λd (Goodman, 1996). Això vol dir que si l'objecte es mou al llarg de l'eix z, l'expressió de la intensitat en el pla on convergeix l'ona esfèrica és la mateixa, però canvia l'augment d'aquesta distribució. Com que s'ha obtingut de nou la transformada de Fourier òptica de l'holograma, es reconstrueix l'objecte original, ja que $f(-x,-y) = \mathcal{TF}[F(u,v)] = \mathcal{TF}[\mathcal{TF}[f(x,y)]]$.

Procediment

Per generar l'holograma de Fourier associat a una imatge, calcularem la transformada de Fourier bidimensional d'aquest objecte. Aquesta distribució de valors complexos cal codificar-la de manera que es pugui enregistrar en dispositius amb transmitància real i positiva (suport fotogràfic) o en dispositius tals que la seva transmitància sigui complexa (pantalles LCD). En difractar-se la llum a través de l'holograma, s'aconsegueix que el camp elèctric escalar tingui, en un cert pla, l'expressió que ens interessa. Dit d'una altra manera, mitjançant les tècniques de l'holografia digital, podem programar l'expressió del camp elèctric.

Codificació d'hologrames pel mètode de Burckhardt

Aquest mètode de codificació consisteix a convertir cada píxel de la transformada en una finestra de 3×3 píxels

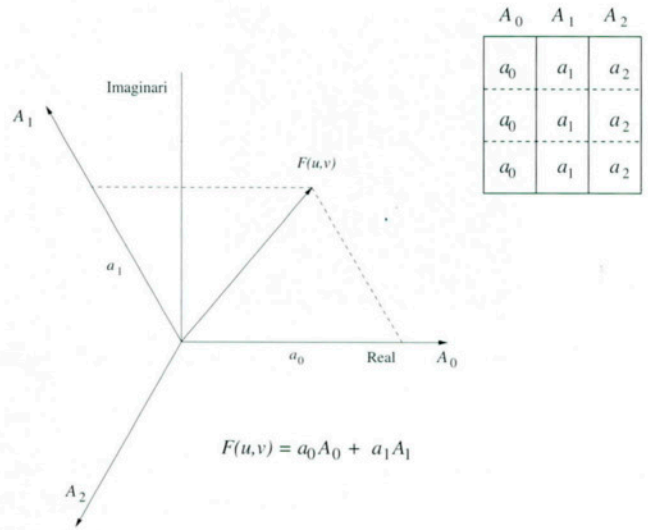

Figura 4: *Codificació d'un valor complex. Els valors de les projeccions amb coeficients positius sobre els eixos A_0, A_1 i A_2 es codifiquen en la finestra de 3×3 píxels*

(4×4 en el model de Lee). El valor de cada píxel d'una mateixa columna és el mateix, per tal de mantenir la relació d'aspecte de la imatge (l'augment en les direccions x i y ha de ser el mateix). El valor de cada píxel es pot representar com un vector en el pla complex. El mètode de codificació consisteix a projectar el valor complex $F(u, v)$ sobre tres eixos (A_0, A_1 i A_2) que formen un angle de $2\pi/3$ entre ells, tal com es representa en la figura 4.

Cada número complex es projecta sobre cadascun dels tres eixos. El valor que s'assigna a les projeccions es normalitza al número de nivells de gris (normalment 256). Com que la transmitància del suport fotogràfic és sempre positiva, es consideren només les projeccions amb component positiva (com que una de les projeccions serà negativa se li assigna el valor zero). Cada valor projectat s'escriu en una subfinestra de 3×1 píxels. La primera columna s'identifica amb l'eix A_0, la segona amb A_1 i la tercera amb A_2.

Es pot demostrar que la transformada de Fourier de la distribució de valors de l'holograma codificat així correspon a l'objecte original. Els detalls d'aquesta demostració els podeu trobar a la referència (Lee, 1970). Un cop obtinguda la transformada codificada, s'imprimeix sobre paper per tal de passar-la a suport fotogràfic de resolució elevada. Suposem que tots el processos, d'impressió i revelatge, són lineals.

És molt important fer notar que no és un mètode directe de codificació de valors complexos sobre suport real i positiu. El que sí que podem assegurar és que podem enregistrar la transformada de Fourier de qualsevol distribució, de valors reals o complexos.

Si es calcula digitalment la transformada de Fourier de l'holograma, podem simular el procés òptic de reconstrucció. En la figura 5*a* observem la imatge original; la figura 5*b* mostra l'holograma corresponent, mentre que en la figura 5*c* es pot observar la simulació de la reconstrucció òptica. Podem comprovar que en la reconstrucció apareixen imatges múltiples de l'objecte reconstruït.

Reconstrucció d'hologrames amb pantalla de cristall líquid

En el cas de la pantalla LCD la codificació és diferent. En aquest tipus de dispositius, la transmitància és complexa, de manera que, per cada nivell de gris que enviem, s'obté un cert valor d'amplitud i de fase. En la figura 6 podem observar la corba característica de la pantalla LCD que hem utilitzat en el pla complex. Aquesta corba s'ha calibrat a partir de l'anàlisi de franges en un interferòmetre Mach-Zehnder, que consisteix en la mesura de la fase relativa entre parells de nivells de gris (Martín-Badosa *et al.*, 1997). Cada punt de la corba s'assigna a un nivell de gris, per exemple, per punts de fase zero el nivell de gris (ng) és zero, el punt de fase π li correspon el nivell de gris 60, etc.

Aproximadament, aquesta pantalla té un comportament «quasi només de fase». Si ens hi fixem, l'amplitud de la transmitància no és constant (té forma d'espiral), i varia en funció del nivell de gris. A més, la pantalla només és capaç de modular la fase entre 0 i $1{,}9\pi$.

Si es fan servir pantalles LCD, la codificació per sistemes de transmitància positiva no té sentit. Per adaptar els valors complexos de la transformada de Fourier, utilitzarem l'algorisme de la mínima distància euclidiana. Aquest consisteix a projectar el valor complex $F(u, v)$ sobre la corba característica de la pantalla, de manera que la distància entre el punt en el pla complex i el punt de la corba escollit sigui mínima. Com que cada punt de la corba es correspon a un cert nivell de gris, obtenim així la distribució de valors (imatge) que s'han d'enviar a la pantalla.

Dispositiu experimental

Un primer problema, que es detecta a l'hora de codificar l'holograma digital, és que es multiplica per nou el nombre de píxels: la imatge de $N \times N$ píxels es transforma en una matriu de $3N \times 3N$ píxels. Una vegada codificat l'holograma en una funció real no negativa, s'imprimeix en paper mitjançant una impressora làser i es fotografia fent servir una càmera amb objectiu macro i pel·lícula d'alta resolució (Kodalith Ortho). El negatiu revelat serveix per reconstruir l'holografia en el banc òptic. La reconstrucció es fa mitjançant una configuració de difractòmetre convergent, descrita en la secció precedent amb un làser de He-Ne de 632,8 nm de longitud d'ona i 10 mW de potència. Fent servir aquesta configuració, la intensitat que s'enregistra és proporcional al mòdul al quadrat de la transformada de Fourier de l'objecte.

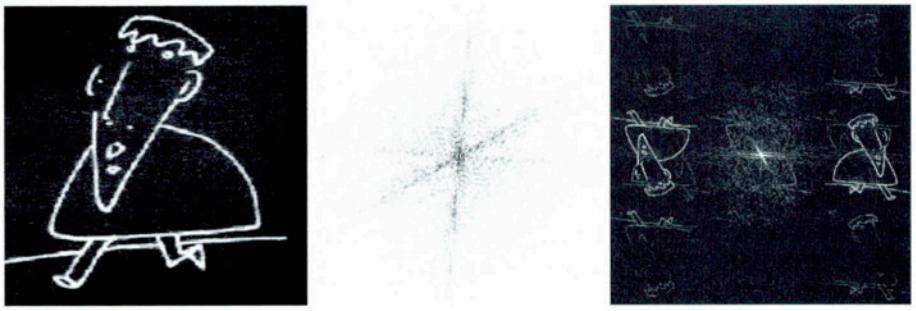

Figura 5: *Simulació del procés de codificació: (a) imatge original, (b) holograma, (c) transformada de Fourier de l'holograma*

El muntatge òptic necessari per reconstruir la informació fent servir una pantalla de cristall líquid és el mateix que en el cas anterior. Mitjançant el programari necessari per al control de la pantalla podem enviar l'holograma, un cop s'ha fet l'assignació de la transformada de la imatge. Un cop captada la imatge amb la càmera, es pot enviar la imatge següent a l'LCD sense cap mena de pas intermedi.

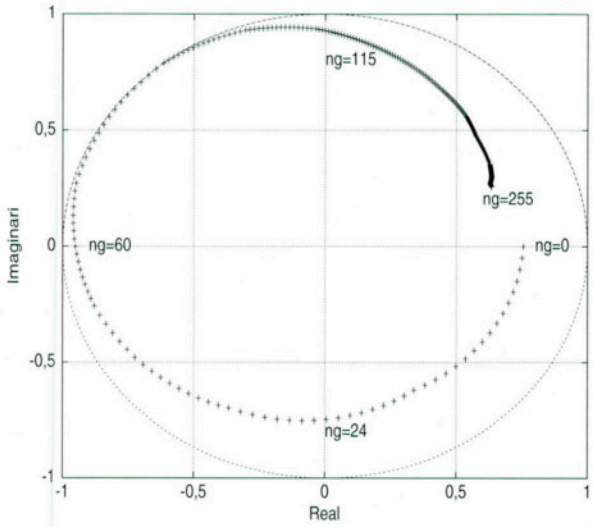

Figura 6: *Corba de modulació de la pantalla LCD*

Resultats

S'han generat hologrames codificats pel mètode de Burckhardt a partir de la imatge de la figura 5*a*. La imatge utilitzada és de 256×256 píxels i, per tant, l'holograma passa a tenir 768×768 píxels. En la figura 7 es mostra l'holograma de Fourier calculat i la reconstrucció òptica que s'obté.

S'han calculat també hologrames de Burckhardt només de fase. Això vol dir que l'amplitud de la transformada de Fourier s'ha fet de valor 1 per a tots els punts. Fer aquesta operació és equivalent a potenciar el pes de les altes freqüències en la informació. En la figura 8 es mostra l'holograma només de fase i la seva reconstrucció.

Hem observat que la discretització d'una imatge provoca la repetició periòdica de la seva transformada de Fourier. Això s'ha observat visualment en el banc òptic. A més, com més gran sigui la separació entre píxels o unitats d'informació, més petita serà la separació entre imatges replicades en el pla de Fourier. Per tant, per evitar la superposició entre imatges reconstruïdes hem de procurar que la grandària de la unitat d'informació en el negatiu fotogràfic sigui prou petita.

Finalment, en la figura 9 es mostra la distribució de valors que s'envia a la pantalla de cristall líquid, obtinguda, en aquest cas, mitjançant l'algorisme de la mínima distància i la reconstrucció òptica. Noteu que el càlcul d'un holograma només de fase (pel mètode de Burckhardt) presenta una semblança conceptual amb els dissenyats per ser utilitzats en LCD amb corbes només de fase, fent servir l'algorisme de la mínima distància euclidiana.

En utilitzar pantalles de cristall líquid, es veu que les imatges reconstruïdes presenten un pic central de llum molt intens (vegeu la figura 9), ja que la corba operativa de l'LCD no és només de fase a la pràctica, la suma dels valors de la corba operativa no és zero (no es compensen) i, d'aquesta menra, l'energia total de la imatge és diferent de zero. Com que la pantalla de cristall líquid està pixelada, ens apareix la imatge repetida amb el pic central inclòs.

Per poder dur a terme una comparació quantitativa dels resultats obtinguts, s'ha calculat el coeficient de correlació estadístic entre la imatge original i les reconstruïdes òpticament. Els resultats es mostren en la taula 1. Els valors més alts del coeficient C indiquen una reconstrucció més fidel a la imatge original.

Mètode	C
Holograma d'amplitud i fase	0,54
Holograma només de fase	0,25
Holograma LCD	0,37

Taula 1: *Valors del coeficient de correlació C*

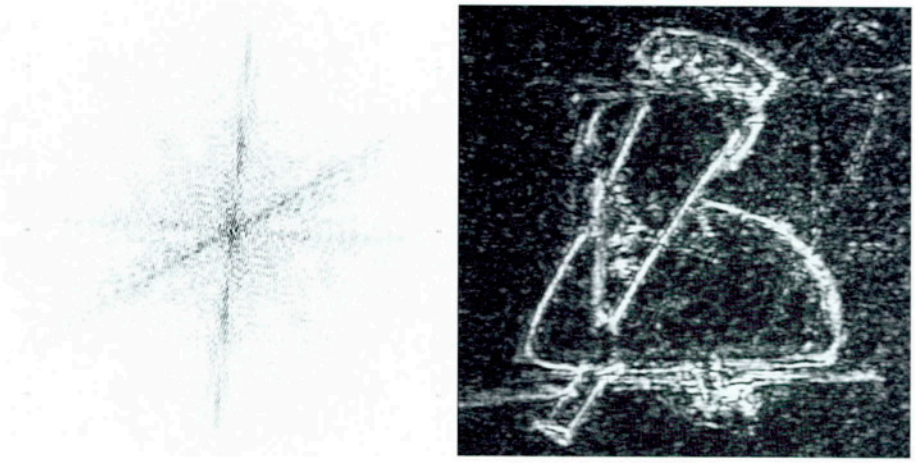

Figura 7: *Holograma i reconstrucció òptica de l'objecte de la figura 5a*

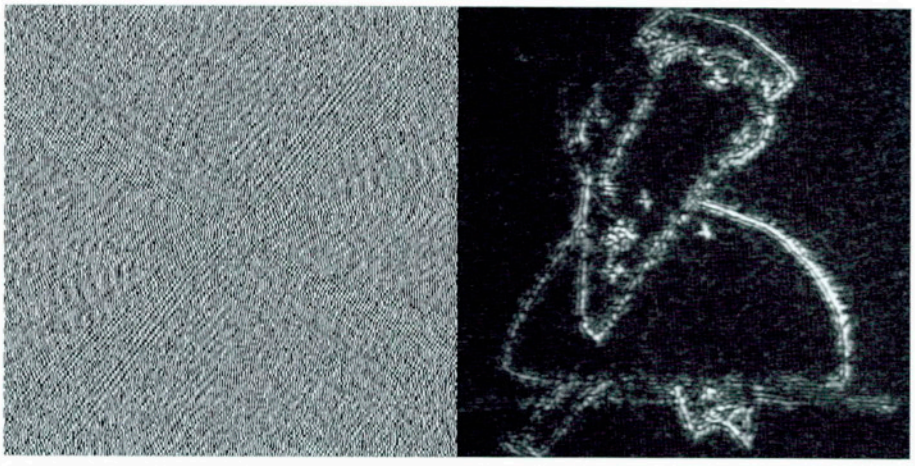

Figura 8: *Holograma només de fase i reconstrucció òptica*

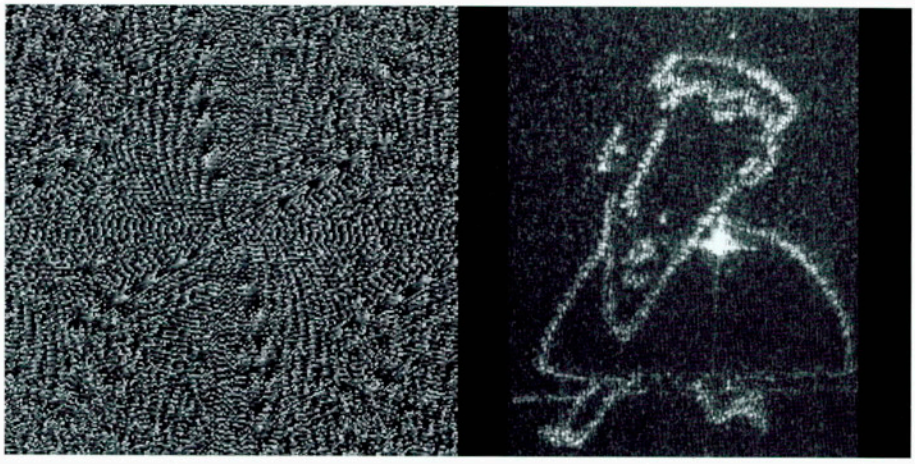

Figura 9: *Distribució de valors enviada a la pantalla de cristall líquid i reconstrucció òptica*

Conclusions

S'ha donat una visió de conjunt al voltant del problema de l'enregistrament i la reconstrucció de fronts d'ona en el domini de Fourier, i s'ha fet èmfasi en els principals resultats de la teoria escalar de la difracció.

Els mètodes de codificació d'hologrames permeten enregistrar en l'espai de Fourier qualsevol tipus d'informació complexa, independentment del seu origen. En reconstruir l'holograma, s'assegura la recuperació del front d'ona amb la informació que es va sintetitzar. La utilització d'aquests mètodes pot permetre en el futur

l'emmagatzemament d'alta densitat d'informació utilitzant memòries hologràfiques.

S'ha reproduït la codificació d'hologrames proposada per Lee i Burckhardt, i també s'han reconstruït imatges codificades en una pantalla de cristall líquid. Tot i que els dispositius fotogràfics presenten una resolució més alta que els dispositius LCD, s'ha comprovat que l'ús del suport fotogràfic presenta inconvenients importants a causa dels diferents passos intermedis requerits per a la síntesi de l'holograma: limitació de resolució en imprimir l'holograma, captura de la fotografia, linealitat del revelatge, inhomogeneïtats de l'emulsió, etc. D'altra banda, la utilització de les LCD facilita tot el procés de codificació, ja que tot el control es fa des de l'ordinador que comanda el dispositiu.

Agraïments

Els autors manifesten el seu reconeixement als membres del Laboratori d'Òptica de la UB pels seus consells i ajut.

Bibliografia

BURCKHARDT, C. B., A simplification of Lee's method of generating holograms by computer, *Appl. Opt.*, **9**, 1949 (1970).

BORN, M. i WOLF, E., *Principles of Optics*, Cambridge University Press (1999).

GOODMAN, J. W., *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill (1996).

IBM Holographic Optical Storage Group, Holographic storage delivers high data density, *Laser Focus World*, **36**, 12, 123–127 (2000).

JUVELLS, I., VALLMITJANA, S., CARNICER, A. i CAMPOS, J., The role of amplitude and phase of the Fourier Transform in the digital image processing, *Am. J. Phys.*, **59**, 744-748 (1991).

LEE, W. H., Sampled Fourier transform hologram generated by computer, *Appl. Opt.*, **9**, 639-643 (1970).

MARTÍN-BADOSA, E., CARNICER, A., JUVELLS, I. i VALLMITJANA, S., Complex modulation characterization of liquid crystal devices by interferometric data correlation, *Meas. Sci. Technol.*, **8**, 764-772 (1997).

VANDERLUGT, A., *Optical Signal Processing*, John Wiley and Sons (1992).